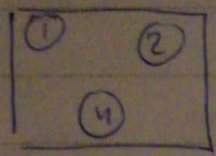
Παράδειγμα 2.3.3 19/10/17

ΚΑΛΠΗ



→ Εκλέγονται k-μπάλες η μία μετά την άλλη με επανατοποθέτηση

n διακ/νες όμοιες

Ποια η πιθανότητα οι μπάλες που θα εκλεγούν να είναι διαφορετικές αν ενδιαφερόμαστε και για τη σειρά επιλογής τους;

Λύση: $P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

Αριθμός δυνατών περιπτώσεων:

$\underset{1\eta}{\overset{n}{\uparrow}}$ επαν. $\underset{2\eta}{\overset{n}{\uparrow}}$ επαν. $\underset{3\eta}{\overset{n}{\uparrow}}$ ..... $\underset{k\eta \text{ επιλογή}}{\overset{n}{\uparrow}}$ =

$= n^k$

Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων:

$\underset{1\eta}{\overset{n}{\uparrow}}$ $\underset{2\eta}{\overset{n-1}{\uparrow}}$ $\underset{3\eta}{\overset{n-2}{\uparrow}}$ $\underset{k\eta}{\overset{(n-(k-1))}{\uparrow}}$

Ζητάω το πλήθος των διατάξεων n-διακεκριμένων στοιχείων ανά k

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Άρα $P(A) = \frac{(n)_k}{n^k}$

Παράδειγμα 2.3.4: Ζάρι ρίχνεται 6 φορές

α) Πιθανότητα του $A = \{$οι όψεις 2,4,6 εμφανίζονται από 2 φορές$\}$

β) Πιθανότητα του $B = \{$το αποτέλεσμα των ρίψεων διαφορετικό$\}$

α) $P(A) = \dfrac{\#\text{ευνοϊκών } A}{\#\text{δυνατών}}$

#δυνατών: $\boxed{1η}$ $\boxed{2η}$ $\boxed{3η}$ $\boxed{4η}$ $\boxed{5η}$ $\boxed{6η}$

τρόποι: $6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 = 6^6$

#ευνοϊκών: Εξι "αντικείμενα - αποτελέσματα ρίψεων" από τα οποία θέλω 2 να είναι τύπου 1 = 2άρια, άλλα 2 να είναι τύπου 2 = 4άρια και τα άλλα 2 να είναι τύπου 3 = 6άρια

$$2+2+2=6$$

$$k\text{-τύπους} \leftarrow n \rightarrow n_1, n_2, \ldots, n_k$$

Άρα $\dbinom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} =$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}$$

Άρα $P(A) = \dfrac{\frac{6}{2!\,2!\,2!}}{6^6}$

β) 1η 2η 3η 4η 5η 6η

δυνατοί τρόποι: 6 5 4 3 2 1 $= 6!$

Άρα $P(B) = \dfrac{6!}{6^6}$

Παράδειγμα 2.3.5:

Οι 52 κάρτες μιας τράπουλας τοποθετούνται σε σειρά η μία μετά την άλλη. Ποια η πιθανότητα η 36^{η} κάρτα να είναι άσσος;

Λύση: $A = \{$η 36^{η} κάρτα να είναι άσσος$\}$

$P(A) = \dfrac{\#\text{ευνοικών } A}{\#\text{δυνατών}}$

$= \dfrac{51! \cdot 4}{52!}$

1η 2η 3η . . . 36η . . . 51η 52η

δυνατοί τρόποι: 52 51 50 . . . 2 1

Άσσος

1η 2η 3η . . . 36η . . . 51η 52η

51 50 49 . . . 4 (άσσοι) . . . 1

(Μετάθεση n-διαφ. αντικειμένων ονομάζεται κάθε δυνατή τοποθέτηση τους σε σειρά πάνω σε ευθεία γραμμή)

Παράδειγμα 2.3.6: Πρόβλημα των γενεθλίων.

Αν υποθέσουμε ότι ένα έτος έχει 365 μέρες όλες το ίδιο πιθανές να γεννηθεί ένα άτομο να υπολογισθεί η πιθανότητα k άτομα ($k < 365$) να έχουν διαφορετικά άτομα;

Λύση: $A = \{k$ άτομα να έχουν διαφορετικά γενέθλια$\}$

$P(A) = \dfrac{\#\text{ευνοϊκών}}{\#\text{δυνατών}}$

$\boxed{1^o}$ $\boxed{2^o}$ $\boxed{3^o}$ $\boxed{4^o}$ .... $\boxed{k^o}$

δυνατές περιπτώσεις: 365 365 ... 365 = 365^k

Ευνοϊκές $\boxed{1^o}$ $\boxed{2^o}$ $\boxed{3^o}$ .... $\boxed{k^o}$ $= (365)_k =$

365 364 363 ... $(365-(k-1))$

$\dfrac{365!}{(365-k)!}$

Άρα $P(A) = \dfrac{\frac{365!}{(365-k)!}}{365!}$

Για ιστορικούς λόγους:

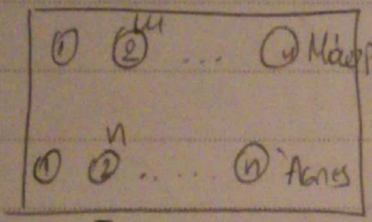
$$\frac{(n)_k}{n^k} \simeq \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1}, \quad k < n$$

Sayrafiezadeh

Παράδειγμα 2.3.7: Μια κάλπη περιέχει m-διακ/νες μαύρες αριθμ. από 1 έως m και n διακ/νες άσπρες αριθμ. 1 έως n. k σφαίρες επιλέγονται η μια μετά την άλλη χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρείτε την πιθανότητα το δείγμα των k-σφαιρών να περιέχει r μαύρες και k-r άσπρες. α) Μη διατεταγμένο, β) Διατεταγμένο δείγμα

Λύση:

α) $P(A) = P\begin{pmatrix} r \text{ μαύρες} \\ \text{και} \\ k-r \text{ άσπρες} \end{pmatrix} = \dfrac{\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}} =$



Κυψέλες χωρίς επανατοποθέτηση

(Πρόταση 1.2.16 Το πλήθος των συνδυασμών m+n διακ/νων στοιχείων ανά k)

$$= \frac{\dfrac{m!}{r!(m-r)!} \cdot \dfrac{n!}{(k-r)!(k-r-n)!}}{\dfrac{m+n!}{k!\,(m+n-k)!}}$$

β) $P(A) = \dfrac{\quad}{\dfrac{(m+n)!}{(m+n-k)!}}$

	$\boxed{1^η}$	$\boxed{2^η}$	$\boxed{3^η}$	....	$\boxed{k^η}$
Δυνατοί τρόποι:	$m+n$	$m+n-1$	$m+n-2$		$(m+n-(k-1))$

$= (m+n)_k =$

$$= \frac{(m+n)!}{(m+n-k)!}$$

Από τις κ-σφαίρες θέλω οι r να είναι μαύρες (ΤΥΠΟΥ I)
και οι k-r να είναι άσπρες (ΤΥΠΟΥ II)

$\binom{k}{r,\, k-r}$ οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης σε σειρά των r-μαύρων και των k-r άσπρων

$$= \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$\underset{m}{1^{η}} \quad \underset{m-1}{2^{η}} \quad \cdots \quad \underset{\substack{(m-(r-1)) \\ (n-(r-k-1))}}{r} = (m)_r$$

$$P(A) = \frac{\dfrac{k!}{r!(k-r)!} \cdot \dfrac{m!}{(m-r)!} \cdot \dfrac{n!}{(n+r-k)!}}{\dfrac{(m+n)!}{(m+n-k)!}}$$

Παράδειγμα 2.3.8: Μια κάλπη περιέχει n-διακεκριμένες μπάλες (n περιττός) Μια μπάλα επιλέγεται στην τύχη P(άρτιο).
0,0526 μικρότερη από P (περιττό)

$n=1$	1	0 άρτιοι
$n=3$	1 2 3	1 άρτιος
$n=5$	1 2 3 4 5	2 άρτιοι
$n=7$	1 2 3 4 5 6 7	3 άρτιοι

P (άρτιος) = $-0,0526 +$ P (περιττός)

$$P(\text{άρτιος}) = \frac{\frac{n-1}{2}}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

$$P(\text{περιττός}) = 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{2n-n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$$

Παράδειγμα 2.3.9: Τι είναι συμφερότερο να στοιχηματίσει κανείς

A = {ότι θα εμφανιστεί τουλάχιστον μια φορά 6 στη ρίψη ζαριού 4 φορές} ή

B = {ότι θα εμφανιστούν τουλάχιστον μια φορά 6άρες στη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές}

<u>Λύση:</u> $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P\left(\begin{array}{c}\text{καμία εξάρι στις}\\ \text{4 φορές}\end{array}\right)$

$$= 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}518$$

	1η	2η	3η	4η
Δυνατές:	6	6	6	6
Ευνοϊκές:	5	5	5	5

$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P\left(\begin{array}{c}\text{καθόλου εξάρες στις}\\ \text{24 ρίψεις των 2 ζαριών}\end{array}\right)$

$$= 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}491$$

	1η ρίψη των 2 ζαριών	2η ρίψη των 2 ζαριών	3η ρίψη των 2 ζαριών	...	24η ρίψη
Δυνατές:	36	36	36		36
Ευνοϊκές:	35	35	35		35

Παράδειγμα 2.3.10: 5 κάρτες επιλέγονται από μια τράπουλα 52 φύλλων
α) ενός χρώματος (όλες οι κάρτες ίδιο χρώμα)
β) ενός ζεύγους δηλ. (α, α, β, γ, δ)
γ) δύο ζευγών δηλ. (α, α, β, β, γ)
δ) τρία ίδια δηλ. (α, α, α, β, γ)
ε) τέσσερα ίδια φύλλα δηλ. (α, α, α, α, β)

Λύση: α) Δυνατές: $\binom{52}{5}$

52 φύλλα
13 είδη (10 αριθμοί, 3 φιγούρες)
4 χρώματα

Ευνοϊκές: 4 είναι οι τρόποι επιλογής χρώματος
δηλ. είτε θα επιλέξω μπαστούνι
— " — καρό
— " — καρδιά
— " — τριφύλλι

και έπειτα τα 5 φύλλα με $\binom{13}{5}$ τρόπους

Άρα $4\binom{13}{5}$

β) Ευνοϊκές: Συνολικά στο χέρι μου έχω 4 είδη της τράπουλας. Οι δυνατοί τρόποι επιλογής τους είναι $\binom{13}{4}$

Από τα 4 αυτά είδη θέλω έναν να τον έχω 2 φορές
Μπορώ να το επιλέξω με 4 τρόπους $=\binom{4}{1}$

Το α, α το επιλέγω με $\binom{4}{2}$
Το β — " — με $\binom{4}{1}$

Το γ το επιλέγω με $\binom{4}{1}$
Το δ — " — $\binom{4}{1}$

$\binom{13}{4}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

γ) $\binom{13}{3}\binom{3}{2}\binom{4}{2}$ επιλογή των 2 φύλλων καρτών του $1^{ου}$ είδους $\binom{4}{2}$ επιλογή των δ $\binom{4}{1}$ επιλογή των γ

τρόποι επιλογής των 3 ειδών

δυαδοί

τρόποι επιλογής των 3 ειδών που θα έχω ζεύγη

δ) $\binom{13}{3}\binom{3}{1}\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

ε) $\binom{13}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{4}\binom{4}{1}$